Série d'exercices

Chapitre : Nombres complexes

Exercice n°1 : QCM

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine (o,$\vec{u},\vec{v}$) .

1) Une solution de 2z+$\bar{z}$ = 9+i est :
   a) 3
   b) i
   c) 3+i
2) Soit z un nombre complexe, $\frac{1}{1+z}$ est égale à :
   a) $\frac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}$
   b) $\frac{1-z}{|1+z|^2}$
   c) $\frac{1}{1-iz}$
3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ.
   Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :
   a) $\frac{\pi}{3}+\theta$
   b) $\frac{2\pi}{3}+\theta$
   c) $\frac{2\pi}{3}-\theta$
4) On considère le nombre complexe : z = $\frac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Alors on a :
   a) |z|=1
   b) Z=-(1-i)$e^{i\pi/3}$
   c) Z=$e^{\frac{13i\pi}{12}}$

Exercice n°2 :

Soit z=$\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

1) Mettre z sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.
2) En déduire cos($\frac{11\pi}{12}$) et sin($\frac{11\pi}{12}$).

Exercice n°3 :

On donne **z_1 = 1+i$\sqrt{3}$ et z_2 = $\sqrt{3}$-i**

1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes z_1 et z_2
2) Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique z_1^{21}

KADEMIA

3) Le plan P muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$
   a) Placer A, B et C d'affixes z_1, z_2 et $z= z_{1+} z_2$
   b) Montrer que OABC est un carré .
   c) En déduire le module et un argument de z

Exercice n°4 :

Résoudre dons IC chacune des équations ci-dessous :

- $Z^2+18\ z+1681= 0$
- $Z^2-(5-i)\ z+8-I = 0$
- $Z^2+4\ (i-1)\ z+2\ (4-i) = 0$
- $Z^2+(1-3i)\ z-2(1+i) = 0$

Exercice n°5 :

On considère dans IC, l'équation (E) **: $z^3-(3+4i)\ z^2-4\ (1-3i)\ z\ +12=0$**

1) Montrer que cette équation admet une solution réelle **z_0** que l'on déterminera .
2) En déduire les autres solutions de (E).

Exercice n°6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans IC, l'équation (E) : **$z^3-(4+i)\ z^2-4\ (7+i)\ z-4= 0$.**
   a) Montrer que cette équation admet une solution réelle **z_0** que l'on déterminera.
   b) En déduire les autres solutions de (E).

2)
   a) Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, 2+2i et 1-i .
   b) Déterminer la nature du triangle OBC .

KADEMIA

Chapitre :

Nombres complexes

CORRECTION : SÉRIE D'EXERCICES

Exercice n°1 : QCM :

1/ c)* $3+i$

2/ a)* $\dfrac{1+\bar{z}}{|1+z|^2}$

3/ b)* $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$

4/ a)* $|z|=1$

Exercice n°2 :

1/ $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2(1-i)}$

Cours : $\arg(z^2)\equiv 2\arg(z)\ [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)\equiv[\arg z-\arg z']\ [2\pi]$

$\arg(z)\equiv\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\ [2\pi]$

$\equiv\dfrac{11\pi}{12}\ [2\pi]$

$|z|=\dfrac{|1+i\sqrt{3}|^2}{2|1-i|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}=r$

d'où $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

2/ Ecrivons z sous la forme algébrique :

$z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=\dfrac{(-\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}-1)}{2}$

d'où $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

par identification : $\begin{cases}\cos\dfrac{11\pi}{12}=-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

Exercice n° 3 :

1] $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = \sqrt{3} - i$

$|z_1| = 2$; $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} \ [2\pi]$

$|z_2| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{6} \ [2\pi]$

Alors $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\right)$

2] $z_1^{21} = 2^{21}\underbrace{\left(\cos 7\pi + i\sin 7\pi\right)}_{(-1)} = 2^{21} \times (-1)$

$= -2^{21}$

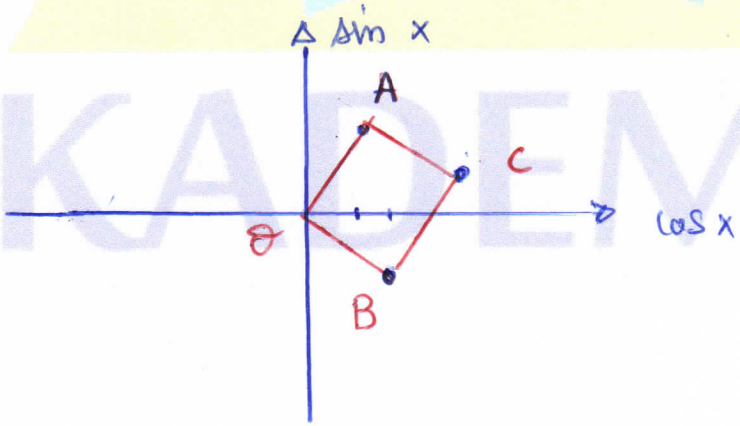
$z_1^{21} = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{21}$

3] a) $A \longmapsto z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$B \longmapsto z_2 = \sqrt{3} - i$

$C \longmapsto Z = z_1 + z_2 = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$

b)



$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\overrightarrow{OC}} = z_C - z_O$

$$\frac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = \frac{(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-i) - (1+i\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1) + i(-\sqrt{3}-1)}$$

Alors $\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_A} = \dfrac{i[(\sqrt{3}-1) - i(1+\sqrt{3})]}{(\sqrt{3}-1) - i(\sqrt{3}+i)}$

$= i$ imaginaire pure.

Donc $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ et on a $OA = OB$

$\Rightarrow$ OACB est un <u>carré</u>

c] $Z = (1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$

$|Z| = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$

$|Z| = \sqrt{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|Z| = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos\theta = -\cos\dfrac{11\pi}{12}$; $\sin\theta = \sin\dfrac{11\pi}{12}$

Alors $\boxed{\theta \equiv \dfrac{\pi}{12} \ [2\pi]}$

Exercice n°4 :

- $z^2 + 18z + 1681 = 0$

$\Delta = 18^2 - 4.(1681) = 324 - 6724 = -6400$

$= (80i)^2$

d'où $\sqrt{\Delta} = 80i$

$z_1 = \dfrac{-18-80i}{2}$; $z_2 = \dfrac{-18+80i}{2}$

$z_1 = -9-40i$; $z_2 = -9+40i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{-9-40i ; -9+40i\}}$

- $z^2 - (5-i)z + 8 - i = 0$

$\Delta = (5-i)^2 - 4(8-i)$

$= (24 - 10i) - 32 + 4i$

$= -8 - 6i = -(8+6i) = (3i-1)^2$

$\sqrt{\Delta} = 3i - 1$

d'où $z_1 = \dfrac{+5 - i - 3i + 1}{2} = 3 - 2i$

$z_2 = \dfrac{5 - i + 3i - 1}{2} = 2 + i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{3 - 2i ;\ 2 + i\}}$

- $z^2 + 4(i-1)z + 2(4-i) = 0$

$\Delta' = 4(i-1)^2 - 2(4-i)$

$= 4(-2i) - 8 + 2i$

$\Delta' = -8 - 6i = (3i-1)^2$

Alors $z_1 = \dfrac{-2(i-1) - (3i-1)}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$

$z_2 = \dfrac{-2(i-1) + (3i-1)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i ;\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}}$

- $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$

$\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i)$

$= -8 - 6i + 8 + 8i = 2i = (1+i)^2$

d'où $z_1 = \dfrac{3i - 1 - 2i}{2}$; $z_2 = \dfrac{3i - 1 + 2i}{2}$

$z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ $\quad$ $z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i$

$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}i ;\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}}$

Exercice n° 5 :

$(E) : z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$

admet une solution réelle z_0.

$\Leftrightarrow z_0^3 - (3+4i)z_0^2 - 4(1-3i)z_0 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow z_0^3 - 3z_0^2 - 4iz_0^2 - 4z_0 + 12iz_0 + 12 = 0$

$\Leftrightarrow (z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12) + i(-4z_0^2 + 12z_0) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4z_0^2 + 12z_0 = 0 \\ z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4z_0(z_0 - 3) = 0 \\ z_0^3 - 3z_0^2 - 4z_0 + 12 = 0 \end{cases}$

Alors $z_0 = 0$ ou $z_0 = 3$

$0^3 - 3\times 0^2 - 4\times 0 + 12 \neq 0$ | $3^2 - 3\times 3^2 - 4(3) + 12 = 0$ Vraie pour $z_0 = 3$

donc $z_0 = 3$ est la solution adéquate, c'est la bonne solution.

Alors (E) s'écrit :

$(E) : (z-3)(az^2 + bz + c) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$

$= az_0^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -3 - 4i \Leftrightarrow b = -4i - 3 + 3 = -4i \\ -3c = 12 \Leftrightarrow c = -4 \end{cases}$ $b = -4i$

d'où $(E) : (z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0$

$\Leftrightarrow z - 3 = 0$ ou $z^2 - 4iz - 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 3$ ou $\Delta' = (2i)^2 + 4 = 0$

Alors $z_1 = z_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{2i}{1} = 2i$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{3, 2i\}}$$

Exercice n°6 :

$(E) : z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$

a/ (E) admet une racine réelle z_0 si :

$z_0^3 - (4+i)z_0^2 + (7+i)z_0 - 4 = 0$

$i(z_0 - z_0^2) + z_0^3 - 4z_0^2 + 7z_0 - 4 = 0$

$$\begin{cases} (z_0 - z_0^2) = 0 \iff z_0 = 0 \text{ ou } z_0 = 1 \\ z_0^3 - 4z_0^2 + 7z_0 - 4 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \end{cases}$$

est la bonne solution.

d'où $z_0 = 1$ est la bonne solution (racine réelle)

équi $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z-1)[az^2 + bz + c]$

$az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -(4+i) \\ c - b = 7+i \Rightarrow b = 4 - 7 - i = -3 - i \\ -c = -4 \Rightarrow c = 4 \end{cases}$$

$(E) : (z-1)[z^2 - (3+i)z + 4] = 0$

$z_0 = 1$; $\Delta = [-(3+i)]^2 - 16 = -8 + 6i = (1+3i)^2$

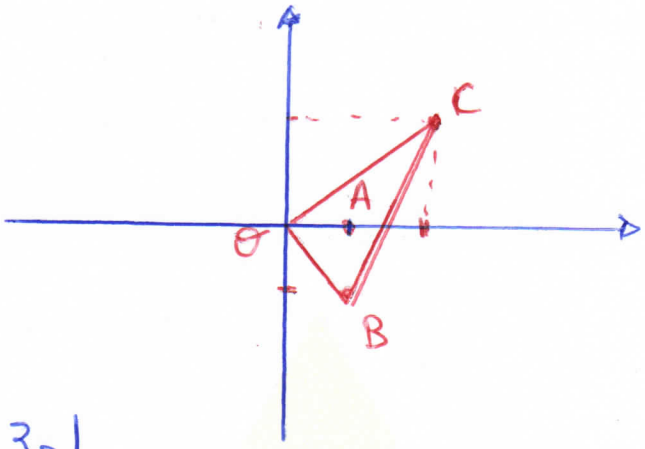
$\sqrt{\Delta} = 1 + 3i$

$z_1 = \frac{3+i - (1+3i)}{2} = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$

$z_2 = \frac{3+i + 1+3i}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 ; 1-i ; 2+2i\}$$

2]



$OC = |z_C - z_O|$

$OC = |z_C| = |2+2i| = 2\sqrt{2}$

$BC = |z_C - z_B| = |2+2i-1+i| = |1+3i| = \sqrt{10}$

$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = |1+3i| = \sqrt{2}$

On remarque que $OB \neq OC = 2\sqrt{2}$

On a $OC^2 + OB^2 = (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 8+2 = 10$

$BC^2 = (\sqrt{10}) = 10$

Alors $OC^2 + OB^2 = BC^2$

D'après pythagore, alors OBC est un triangle rectangle en O

KADEMIA